

O Efeito Hall Quântico

Belarmino G M Tavares

Introdução

Pegue numa grande quantidade de elétrons, restrinja-os a se mover em um plano bidimensional e ligue um campo magnético forte. Esta configuração simples fornece a configuração para alguns dos resultados mais maravilhosos e surpreendentes da física. Estes fenômenos são conhecidos coletivamente como o efeito Hall Quântico.

A condutividade do Hall leva valores quantificados, $\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \nu$. Originalmente, descobriu-se que ν é, com extraordinária precisão, um valor inteiro [1]. É claro que estamos muito acostumados com as coisas que estão sendo quantificadas no nível atômico microscópico. Mas isso é algo diferente. É a quantização de uma propriedade macroscópica emergente em um sistema cheio de impurezas e desordem que envolve muitas partículas e sua explicação requer algo novo. Acontece que essa novidade é o papel que a topologia pode desempenhar em sistemas quânticos de muitos corpos.

Posteriormente, verificou-se que ν não está restrito apenas a ter valores inteiros, mas também pode assumir valores racionais muito específicos. As frações mais proeminentes experimentalmente são $\nu = 1/3$ e $\nu = 2/5$, mas há muitas frações que foram vistas [2]. Isso precisa de outro ingrediente. Desta vez, são as interações entre elétrons que resultam em um estado quântico altamente correlacionado que é agora reconhecido como um novo estado da matéria. É aqui que as coisas mais notáveis acontecem. As partículas carregadas que circulam em torno desses sistemas carregam uma fração da carga do elétron, como se o elétron se dividisse em várias partes. No entanto, isso ocorre apesar do fato de que o elétron é (e permanece!) um constituinte indivisível da matéria.

Na verdade, não é apenas a carga do elétron que fraciona: isso também acontece com as "estatísticas" do elétron. Sendo o elétron é um férmion, o que significa que a distribuição de muitos elétrons é governada pela função de distribuição Fermi-Dirac. Quando o elétron se divide, o mesmo acontece com a natureza fermiônica. Os constituintes individuais não são mais férmions, mas também não são bósons. Em vez disso, são novas entidades conhecidas como aníons que, nos casos mais simples, se situam em algum lugar entre bósons e férmions. Em exemplos mais complicados, até mesmo essa descrição é quebrada: os objetos resultantes são chamados de não-abelianos e fornecem a incorporação física do tipo de entrelaçamento não-local famoso na mecânica quântica[3].

Devido a esse tipo de comportamento impressionante, o efeito Hall quântico tem sido uma fonte constante de novas ideias, fornecendo dicas de onde procurar por fenômenos interessantes e novos, a maioria deles relacionada às maneiras pelas quais a matemática da topologia colide com a física quântica. Exemplos importantes incluem o assunto de isolantes topológicos, ordem topológica e computação quântica topológica. Todos eles têm sua gênese no efeito Hall quântico.

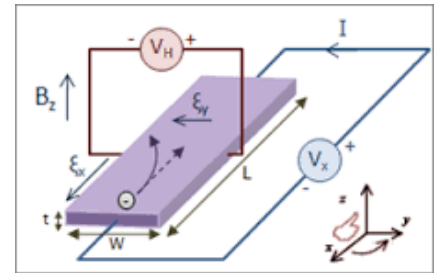
Subjacente a todos esses fenômenos está um impressionante edifício teórico, que envolve um tour por alguns dos mais belos e importantes desenvolvimentos da física teórica e matemática nas últimas décadas. O primeiro ataque ao problema centrou-se nos detalhes microscópicos das

funções de onda do elétron. Abordagens subsequentes olharam para o sistema de uma perspectiva de campo mais grosseira, onde uma construção sutil conhecida como teoria de Chern-Simons desempenha o papel principal [4]. No entanto, outra perspectiva vem da borda da amostra, em que certas excitações vivem, que sabem mais sobre o que está acontecendo dentro do que você imagina. O principal objetivo deste trabalho é descrever essas diferentes abordagens e as relações surpreendentes entre elas.

I- O efeito Hall clássico

O original e clássico efeito Hall foi descoberto em 1879 por Edwin Hall. É uma consequência simples do movimento de partículas carregadas em um campo magnético.

A montagem experimental consiste em ligar um campo magnético constante, \mathbf{B} apontando na direção z . Enquanto isso, os elétrons estão restritos a se mover apenas no (x, y) . Uma corrente constante I é feita para fluir na direção x . O efeito Hall é a afirmação de que isso induz uma voltagem V_H na direção y . Isso é mostrado na figura à direita.



O efeito Hall surge do fato de que um campo magnético faz com que partículas carregadas se movam em círculos. Vamos lembrar o básico. A equação de movimento para uma partícula de massa m e carga e em um campo magnético é dado por $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B}$.

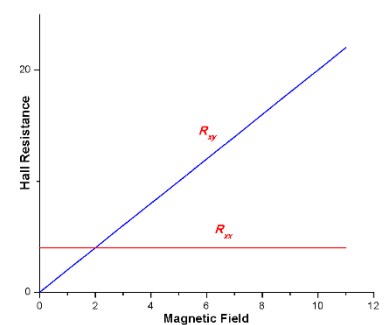
Quando o campo magnético aponta na direção z , de modo que $B = (0, 0, B)$, e a partícula se move somente no plano transversal, então $v = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$, as equações de movimento tornam-se duas equações diferenciais acopladas cuja solução são: $x(t) = X - R \sin(\omega_B t + \varphi)$ e $y(t) = Y + R \cos(\omega_B t + \varphi)$, onde $\omega_B = \frac{eB}{m}$ é a frequência ciclotrônica.

Resistividade & Resistência

A resistividade é definida como o inverso da condutividade. Isto permanece verdadeiro quando ambos são matrizes, $\rho = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix}$.

Os componentes fora do diagonal do tensor de resistividade, ρ_{xy} , possuem algumas propriedades bastante agradáveis. Primeiro, eles são independentes do tempo de espalhamento τ . Isso significa que eles captam algo fundamental sobre o material em si, em oposição aos impurezas do material que é responsável pelo espalhamento.

A segunda boa propriedade é fazer o que medimos. Normalmente medimos a resistência R , que difere da resistividade ρ por fatores geométricos. No entanto, para ρ_{xy} essas duas coisas coincidem, isto é, $\rho_{xy} = R_{xy}$. Agora temos tudo o que precisamos para fazer uma previsão experimental, somente ρ_{xx} depende do tempo de espalhamento τ , e $\rho_{xx} \rightarrow 0$ conforme os processos de espalhamento se tornam menos importantes e $\tau \rightarrow \infty$. A figura ao lado, plotamos as duas resistividades como uma função do campo magnético.



II- Efeitos Hall Quânticos

Agora entendemos a expectativa clássica. E, claro, essa expectativa é confirmada sempre que podemos confiar na mecânica clássica. Mas o mundo é governado pela mecânica quântica. Isso se torna importante em baixas temperaturas e fortes campos magnéticos, onde coisas mais interessantes podem acontecer.

É útil distinguir entre dois efeitos Hall quânticos diferentes que estão associados a dois fenômenos relacionados. Estes são chamados de efeitos Hall quânticos inteiros e fracionários. Ambos foram descobertos experimentalmente e só posteriormente entendidos teoricamente.

O Hamiltoniano para um elétron não-relativístico movendo-se em duas dimensões em um campo magnético perpendicular é dado por $H = \frac{1}{2m_b} \left(p + \frac{eA}{c} \right)^2$, Onde m_b é a massa efetiva do elétron. Escolhendo o calibre simétrico $A = \frac{B \times r}{2} = \frac{B}{2} (-y, x, 0)$ e tomando as unidades de comprimento como o comprimento magnético $l = \sqrt{\hbar c / eB} = 1$, o Hamiltoniano se torna $H = \hbar \omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$ onde $\hbar \omega_c = \hbar eB / m_b c$ é a energia do ciclotron, e os operadores de escada são definidos como, $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{z}}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)$ e $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)$ em termos das coordenadas complexas $z = x - iy = r e^{-i\theta}$ e $\bar{z} = x + iy = r e^{i\theta}$. Definição adicional $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{z}}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)$ e $b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)$ pode-se verificar que $[a, a^\dagger] = 1$ e $[b, b^\dagger] = 1$ e todos os outros comutadores desaparecem. Os níveis de Landau (LL) de índice n são autovalores de $a^\dagger a$ e o componente z do operador momento angular é definido como $L = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} = -\hbar(b^\dagger b - a^\dagger a) = -\hbar m$, com $m = -n, -n + 1, \dots, 0, 1, \dots$ no n^{th} LL. Os auto estados de uma única partícula são obtidos da maneira padrão por aplicações sucessivas de operadores de escada, $|n, m\rangle = \frac{(b^\dagger)^{m+n} (a^\dagger)^n}{\sqrt{(m+n)! n!}} |0, 0\rangle$, com valores próprios da energia $E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$.

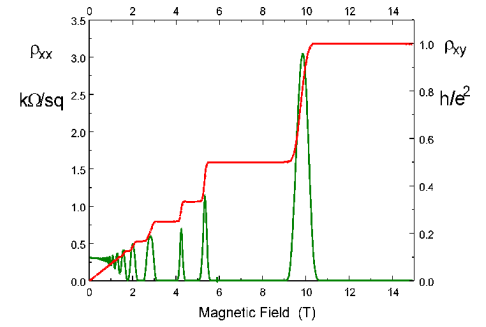
A degenerescência LL pode ser obtida considerando-se uma região de raio R centrada na origem e perguntando quantos estados de partículas individuais estão dentro dela. Para o LLL, o autoestado $|0, m\rangle$, tem seu peso localizado no círculo de raio $r = \sqrt{2m} l$. O maior valor de m para o qual o estado de uma única partícula cai dentro de nossa região circular é dado por $M = R^2 / 2l^2$, que também é o número total de auto estados de partícula única no LLL que estão dentro do disco (negligenciando as correções de ordem um). Assim, a degenerescência por unidade de área é $M / \pi R^2 = 1 / (2\pi l^2) = B / \phi_0$ que é o número de quanta de fluxo (com um quantum de fluxo único definido como $\phi_0 = hc / e$) penetrando a amostra através de uma área unitária. O fator de preenchimento, que é o número nominal de LLS preenchidos, é igual ao número de elétrons por quantum de fluxo, dado por: $\nu = \rho / (B / \phi_0) = 2\pi l^2 \rho$, onde ρ é a densidade dos estados eletrônicos em 2D.

II.1- Efeitos Hall Quânticos Inteiro (IQHE)

Os primeiros experimentos explorando o regime quântico do efeito Hall foram realizados em 1980 por von Klitzing.

Quando plotada em função do campo magnético B , a resistência de Hall exibe numerosos platôs nos quais seus valores são precisamente quantificados. A observação de planaltos em $R_H \frac{h}{ne^2}$ onde n são inteiro [1]. O platô caracterizado pelo inteiro n ocorre na vizinhança de $\nu \equiv Be/\rho hc = n$. Na região do planalto, a

resistência longitudinal exibe um comportamento de Arrhenius: $R_{xx} \sim \exp\left(-\frac{\Delta}{2k_B T}\right)$. Isto dá uma escala de energia Δ , que é interpretada como uma lacuna no espectro de excitação. R_{xx} tende para zero no limite de $T \rightarrow 0$, indicando transporte sem dissipação. O IQHE é bem entendido porque pode ser explicado em um modelo de elétrons não-interativos. Sua explicação por Laughlin [5] envolve dois ingredientes nomeadamente, o aparecimento de um gap em um sistema puro em $\nu = n$, que se origina devido à formação de LLs, e a presença de desordem e impurezas, que produz uma reservatório de estados localizados nos gaps da energia, necessários para o estabelecimento de platôs quantizados.



Thouless e colaboradores [4] esclareceram a natureza topológica do IQHE considerando o problema na presença de um potencial periódico e mostrando que a condutância Hall (em unidades de e^2/h) de uma banda completa é um invariante topológico, ou seja, é um número Chern. Esse entendimento serviu como motivação para os desenvolvimentos que levam aos isolantes topológicos.

O valor de ν é medido como sendo um inteiro com uma precisão extraordinária - algo como uma parte em 10^9 . A quantidade $2\pi\hbar/e^2$ é chamada de *quantum de resistividade*. Agora é usado como padrão para medir a resistividade. Além disso, o efeito Hall quântico inteiro é agora usado como base para medir a razão das constantes fundamentais, $2\pi\hbar/e^2$ às vezes referida como a constante de von Klitzing.

Acontece que os planaltos devem sua existência a mais um pouco de física: desordem. Isso ocorre porque as amostras experimentais contêm impurezas que podem ser modeladas pela adição de um potencial aleatório $V(x)$ ao Hamiltoniano. Um segundo efeito da desordem, transforma muitos dos estados quânticos de estendido para localizado. Aqui, um estado estendido é espalhado por todo o sistema. Em contraste, um estado localizado é restrito a estar em alguma região do espaço.

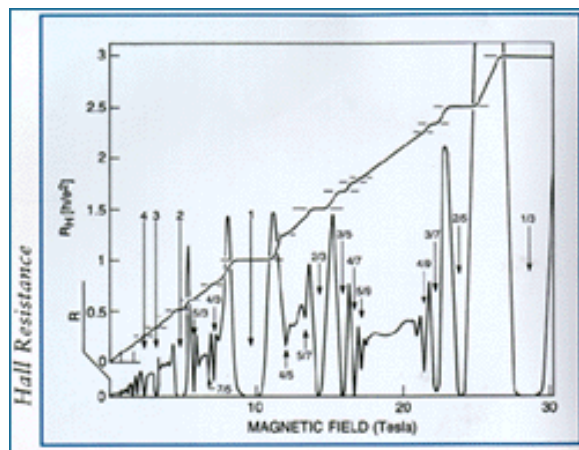
II .2- O Efeito Hall Quântico Fracionário

O fenômeno do FQHE refere-se à observação de platôs quantizados na resistência Hall em $R_H = \frac{h}{fe^2}$, com f fracionário. O platô caracterizado pela fração f é centrado no fator de preenchimento $\nu = f$. A resistência longitudinal exibe comportamento ativo na região dos platôs, com $R_{xx} \sim e^{-\Delta/2k_B T}$ desaparecendo exponencialmente à medida que a temperatura tende para zero, indicando a presença de um gap Δ no espectro. O campo do FQHE começou com a observação de 1982 do $\nu = 1/3$ por Tsui et al. [3] e sua explicação em 1983 por Laughlin [5],

através da introdução de uma elegante função de onda de ansatz para os estados fundamentais em preenchimentos LL $\nu = 1/m$ (m ímpar):

$$\Psi_{1/m}^{Laughlin} = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \exp \left[-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2 \right]$$

Como as condições experimentais foram melhoradas reduzindo a desordem e diminuindo a temperatura, um grande número de frações adicionais se revelaram nos anos subsequentes.



A explicação do FQHE requer uma consideração da interação entre elétrons. O Hamiltoniano para interação de elétrons em um campo magnético é dado por

$$H = \sum_j \frac{1}{2m_b} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_j + \frac{e}{c} A(r_j) \right]^2 + \frac{e^2}{\epsilon} \sum_{j < k} \frac{1}{|r_j - r_k|} + \sum_j U(r_j) + \frac{1}{2} E_z$$

$U(r)$ é um potencial de um corpo que incorpora os efeitos do fundo e desordem positivos uniformes, ϵ é a constante dielétrica do semiconductor do host, e o splitting de Zeeman é definida como $E_z = 2g\mu_e B.S$, sendo g o fator de Landé. Teóricos tipicamente consideram o limite conveniente de grandes campos magnéticos onde $((e^2/\epsilon l)/\hbar\omega_c) \rightarrow 0$ e $((e^2/\epsilon l)/E_z) \rightarrow 0$, então todos os elétrons que ocupam LLL têm o mesmo spin. Desligando a desordem e suprimindo o termo de fundo, e usando $e^2/\epsilon l$ e l como as unidades de energia e comprimento, o Hamiltoniano torna-se $H = P_{LLL} \sum_{j < k} \frac{1}{|r_j - r_k|} P_{LLL}$, onde P_{LLL} denota projeção de LLL. Apesar da aparente simplicidade desse hamiltoniano, o problema de FQHE é não trivial porque não contém nenhum parâmetro pequeno; De fato, a teoria não tem nenhum parâmetro. Quando confrontados com um sistema de interação de elétrons, nossa compreensão teórica depende da disponibilidade de um estado de referência. Por exemplo, a teoria de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) começa com o mar Fermi não-interativo, ou seja, o estado normal, e procura por uma instabilidade devido a uma interação atrativa fraca [5].

O efeito da interação é fundamentalmente não-perturbativo, porque uma interação arbitrariamente fraca de Coulomb (como pode ser organizada tomando-se uma constante dielétrica muito grande ϵ) abre brechas em alguns fatores de preenchimento especiais.

Essas observações levantam muitas questões. Qual mecanismo físico que está por trás da origem do FQHE? Por que os gaps se abrem em uma LL parcialmente preenchida? Por que tantas frações são observadas? Por que a maioria deles tem denominadores ímpares? Por que não há FQHE em 1/2, a fração mais simples? Qual é o papel do spin? Quais polarizações de spin são possíveis? Por que o segundo LL mostra FQHE com uma fração de denominador par 5/2? Como podemos calcular, de forma confiável, intervalos, dispersões de excitons, polarizações de spin, funções de resposta? Que fenômenos além do FQHE surgem? Houve progresso em responder a muitas dessas perguntas a partir do entendimento dos férmions composto.

Teoria dos Férmions Composto

A teoria dos férmions compostos (CF) começa com a antecipação de que o FQHE e o IQHE podem ser unificados, o que é motivado pelo fato experimental de que não há distinção qualitativa entre as observações dos planaltos inteiro e fracionário. Como o IQHE é uma propriedade de elétrons que interagem fracamente, uma compreensão do FQHE como um IQHE exigiria o surgimento de certos férmions que estão interagindo fracamente.² Essas partículas foram identificadas e são chamadas de *CFs*. Os fundamentos da teoria da CF são os seguintes:

Cada elétron captura um número par ($2p$) de vórtices quantizados para se transformar em novas partículas chamadas *CFs*.

Os *CFs* interagem muito mais fracamente que os elétrons e, em muitas situações, podem ser tratados como partículas quase livres. Sua propriedade mais fundamental é que, como resultado dos vórtices conectados, eles experimentam um campo magnético efetivo, $B^* = B - 2p\rho\phi_0$ e por isso é possível derivar o fator de preenchimento fracionário $\nu = \frac{\nu^*}{2p\nu^* \mp 1}$. Levando em conta a formação dos férmions compostos (*CFs*), isto permite a unificação do FQHE e do IQHE não apenas explica o fenômeno que o motivou, mas tem consequências inesperadas.

Conclusão

- Devido a esse tipo de comportamento impressionante, o efeito Hall quântico tem sido uma fonte constante de novas ideias, fornecendo dicas de onde procurar por fenômenos interessantes e novos, a maioria deles relacionada às maneiras pelas quais a matemática da topologia colide com a física quântica

Uma unificação do FQHE e do IQHE não apenas leva à explicação do FQHE, mas também prevê uma nova classe de férmions, chamados férmions compostos.

- Esse entendimento revela uma estrutura subjacente que engloba vários outros fenômenos. Férmions compostos foram observados diretamente em vários experimentos e seus vários números quânticos foram medidos.

- A teoria de férmions compostos fornece explicações para um grande número de fatos a partir de um único princípio, e produz números extremamente precisos sem quaisquer parâmetros ajustáveis.

Referencias Bibliográficas

[1] Landau LD, Lifshitz EM. 1980. *Statistical Physics*. Oxford, UK: Pergamon

[2] von Klitzing K, Dorda G, Pepper M. 1980. *Phys. Rev. Lett.* 45:494–97

[3] Tsui DC, Stormer HL, Gossard AC. 1982. *Phys. Rev. Lett.* 48:1559–62

[4] Thouless DJ, Kohmoto M, Nightingale MP, den Nijs M. 1982. *Phys. Rev. Lett.* 49:405–8

[5] Laughlin RB. 1983. *Phys. Rev. Lett.* 50:1395–98